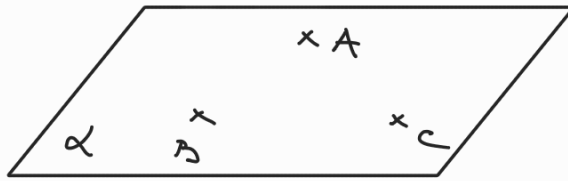
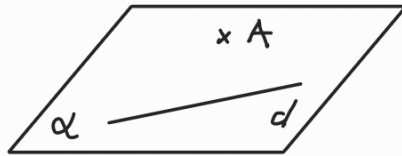


DETERMINAREA PLANULUI

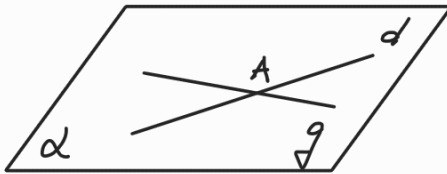
1. $A, B, C = \text{necoliniare} \Rightarrow \alpha = (ABC)$



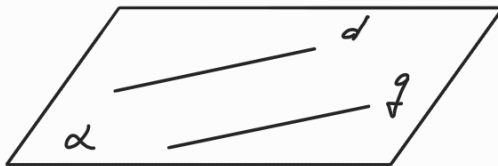
2. $A \notin d \Rightarrow \alpha = (A, d)$



3. $d \cap g = \{A\} \Rightarrow \alpha = (d, g)$



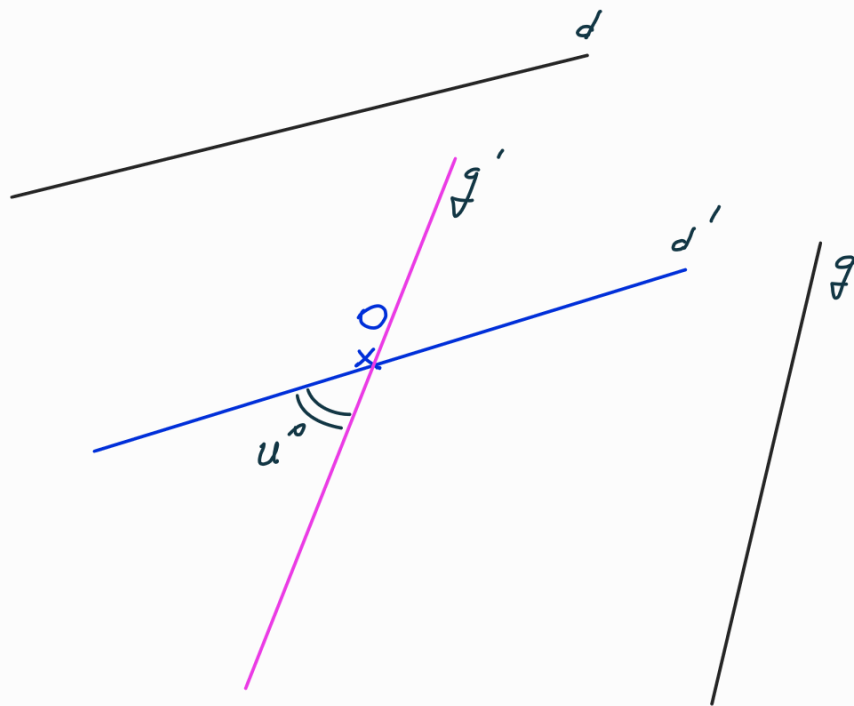
4. $d \parallel g \Rightarrow \alpha = (d, g)$



UNGHIU LA 2 DREPTI ÎN SPAȚIU

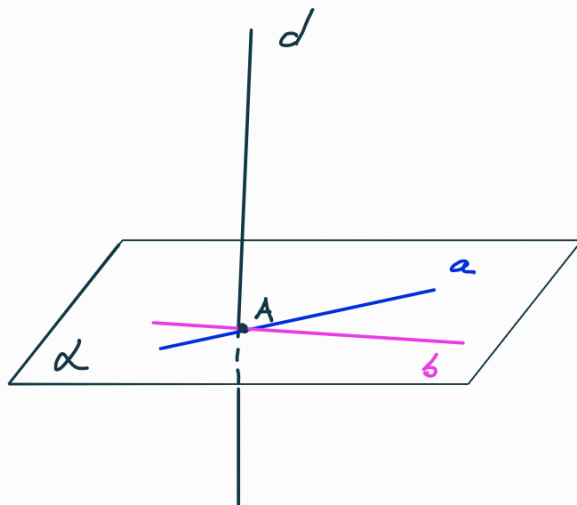
Def: $\angle$ a 2 drepte în spațiu = orice $\angle$ ascuțit sau drept cu vârful în orice punct al planului și cu laturile respectiv paralele cu dreptele date

$$d \parallel d' ; g \parallel g' \Rightarrow \angle(d, g) = \angle(d', g') \leq 90^\circ$$



DREAPTĂ PERPENDICULARĂ PE UN PLAN

Teoremă O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă este perpendiculară pe 2 drepte concurente din acel plan



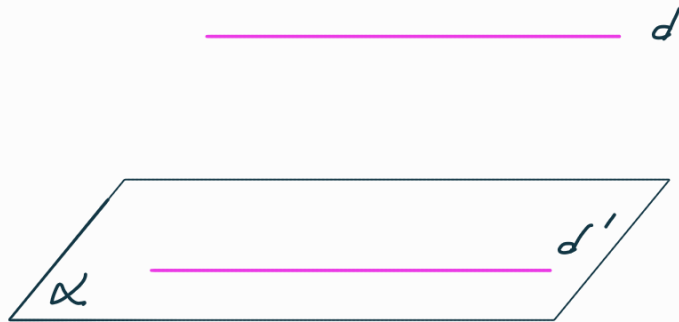
$$\begin{array}{l} d \perp a \\ d \perp b \\ a, b \subset \alpha \\ a \cap b = \{A\} \end{array} \Bigg/ \Rightarrow d \perp \alpha$$

Scz

Dacă o dreaptă $d \perp \alpha \Rightarrow d$ este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan

DREAPTĂ PARALELĂ CU UN PLAN

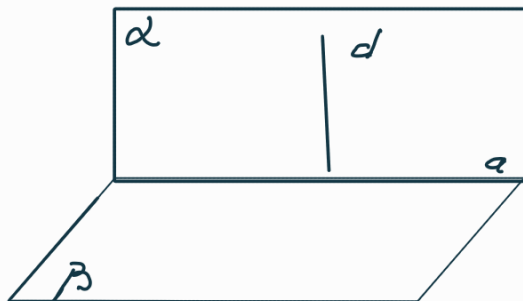
Teoremă: O dreaptă paralelă cu o dreaptă dintr-un plan este paralelă cu planul (sau conținută în el)



$$\left. \begin{array}{l} d \parallel d' \\ d' \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel \alpha$$

PLANE PERPENDICULARE

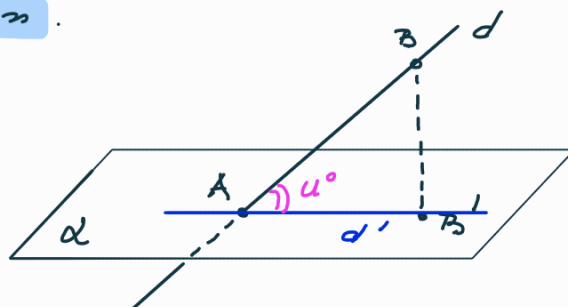
Def: Două plane sunt perpendiculare dacă unul dintre ele conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt plan



$$\left. \begin{array}{l} d \perp \beta \\ d \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

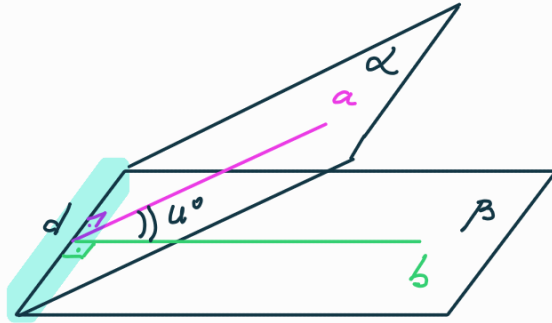
UNGHIIUL DINTRE O DREAPTĂ ȘI UN PLAN.

Def. Unghiul dintre o dreaptă și un plan este unghiul dintre dreaptă și proiecția ei pe plan.



$$pr_{\alpha} d = (AB') \Rightarrow \angle(d, \alpha) = \angle(d, AB') = \angle(d, d') = \angle(d, d')$$

UNGHIU DIEDRU. UNGHIU DINTRE 2 PLANE

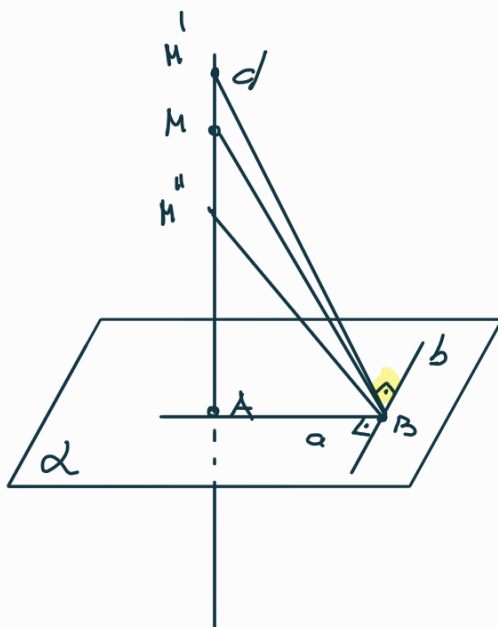


$$\begin{array}{l} d \cap \beta = d \\ a \subset \alpha \\ a \perp d \\ b \subset \beta \\ b \perp d \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle(d, \beta) = \angle(a, b) = 40^\circ$$

$$0^\circ \leq \angle \leq 90^\circ$$

TEOREMA CELOR 3 PERPENDICULARE



$$\begin{array}{l} d \perp \alpha \\ d \cap \alpha = \{A\} \\ A \in a \\ a, b \subset \alpha \\ a \perp b \\ a \cap b = \{B\} \end{array} \quad \Rightarrow (\forall) M \in d \quad MB \perp b$$

RECÍPROCA 1 A TH. 3 L

$$d \perp \alpha$$

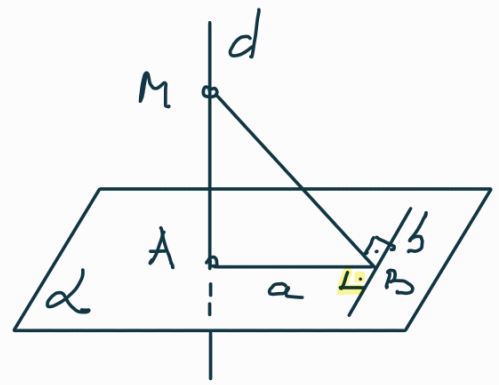
$$d \cap \alpha = \{A\}$$

$$a, b \subset \alpha$$

$$a \cap b = \{B\}$$

$$M \in d$$

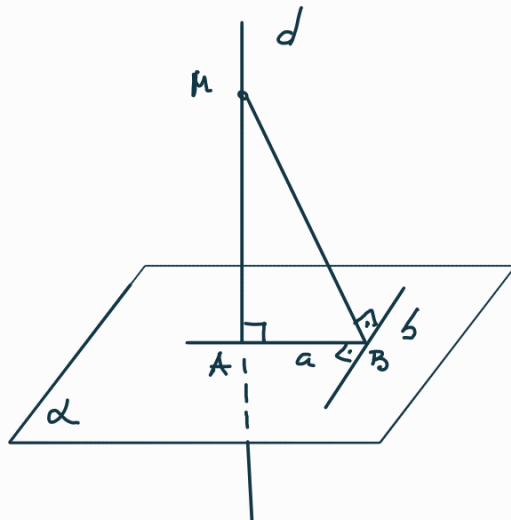
$$MB \perp b$$



$$R, TH. 3 L$$

$$\Rightarrow a \perp b$$

RECÍPROCA 2 A TH. 3 L



$$d \perp a$$

$$a \perp b$$

$$a, b \subset \alpha$$

$$M \in d$$

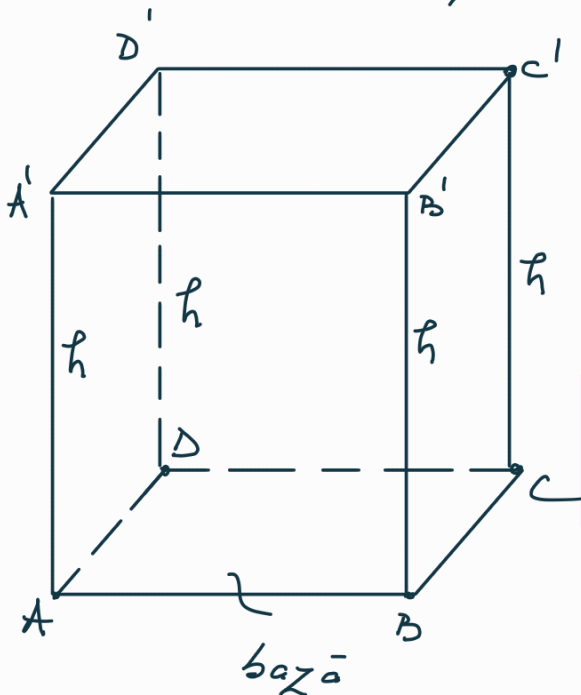
$$MB \perp b$$

$$\Rightarrow d \perp \alpha$$

PRISMA PATRULATERĂ REGULATĂ DREAPTĂ

1. Baza este poligon regulat
 - pătrat
 - Δ echilateral
 - hexagon regulat
2. Muchiile laterale sunt perpendiculare pe planul bazei

Prismă dreaptă:



$$A_{laterală} = P_{bazei} \cdot h$$

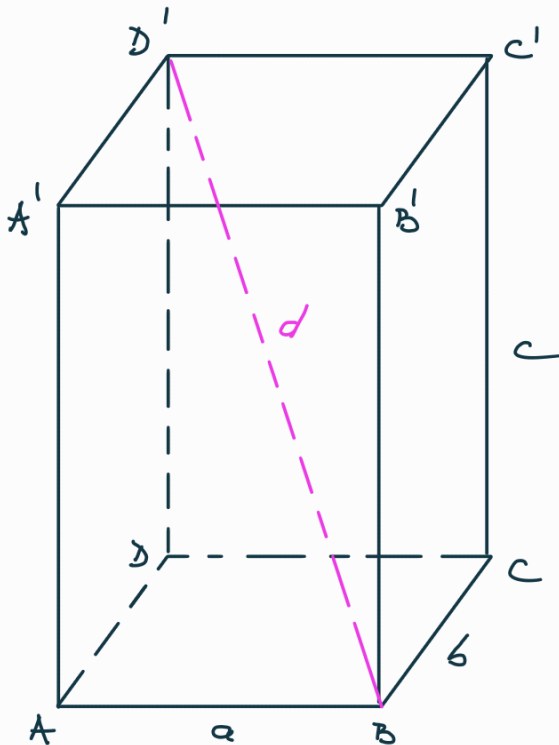
P_b = perimetrul bazei

h = înălțimea prismei

$$A_{totală} = A_{lat.} + 2A_{bazei}$$

$$V = A_{bazei} \cdot h$$

Paratetipiped dreptunghic - toate fețele sunt dreptunghiuri



$$A_{lat} = P_{bazei} \cdot h = (2a + 2b) \cdot c$$

$$A_{lat} = 2(a + b) \cdot c$$

$$A_{tot} = A_{lat} + 2A_{bazei} =$$

$$= 2ac + 2bc + 2ab$$

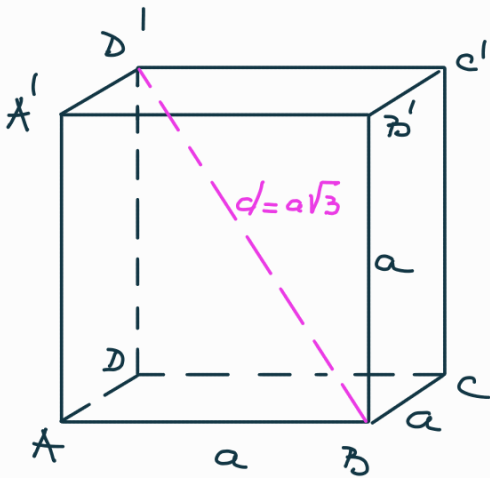
$$A_{tot} = 2(ac + bc + ab)$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

d = diagonala paralelipipedului dreptunghic

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Cubul - toate fețele sunt pătrate



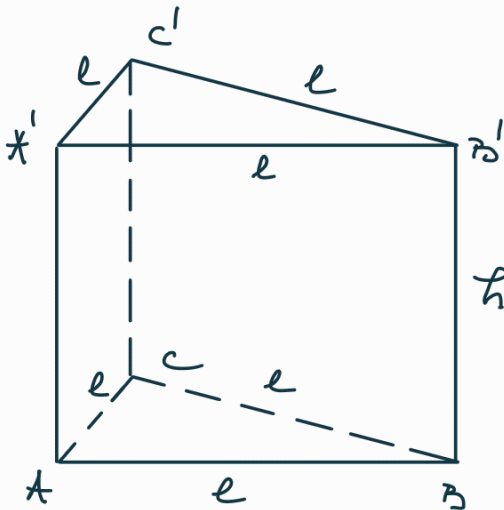
$$A_{\text{lat}} = 4a^2$$

$$A_{\text{tot}} = 6a^2$$

$$V = a^3$$

$$d = a \cdot \sqrt{3}$$

Prisma triunghiulară regulată - baza este Δ echilateral



$$P_{\text{bazei}} = 3e$$

$$A_{\text{bazei}} = \frac{e^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$A_{\text{lat}} = P_{\text{bazei}} \cdot h$$

$$A_{\text{tot}} = A_{\text{lat}} + 2A_{\text{bazei}} =$$

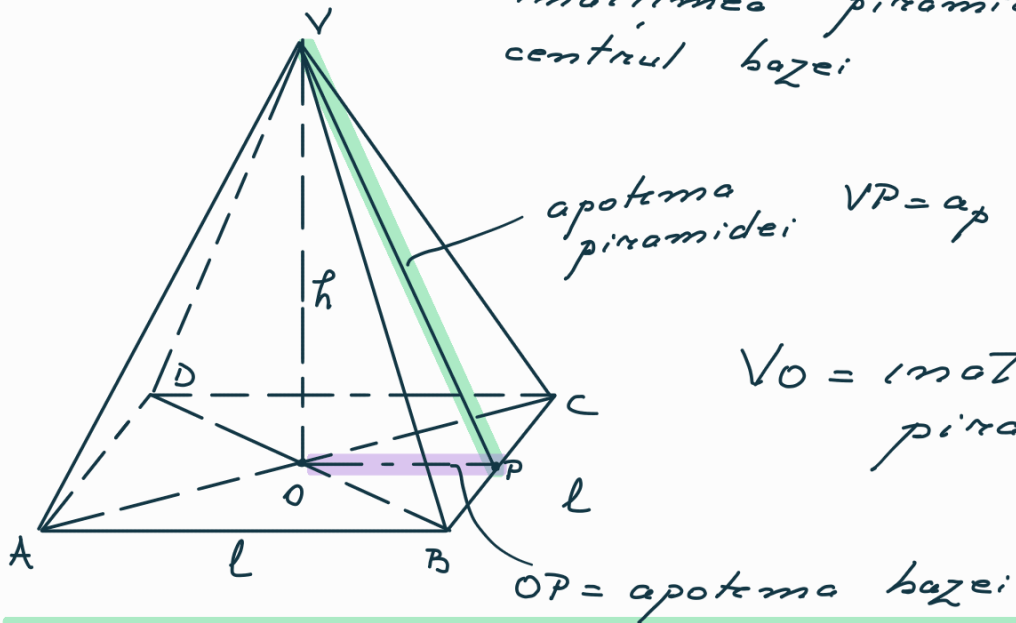
$$= P_{\text{bazei}} \cdot h + 2 \cdot \frac{e^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$V = A_{\text{bazei}} \cdot h$$

PIRAMIDA REGULATĂ

- baza este poligon regulat $\begin{cases} \text{• patrulat} \\ \text{• 6 lăţit} \\ \text{• hexagon} \\ \text{regulat} \end{cases}$

- înălţimea piramidei cade în centrul bazei



$VO = \text{înălţimea piramidei} = h$

$$A_{\text{cat}} = \frac{P_{\text{bazei}} \cdot a_p}{2} = \frac{n \cdot l \cdot a_p}{2}$$

$n = \text{nr. laturilor bazei}$

$$A_{\text{tot}} = A_{\text{cat}} + A_{\text{bazei}}$$

$$V = \frac{A_{\text{bazei}} \cdot h}{3}$$

$$a_p^2 = h^2 + a_b^2$$

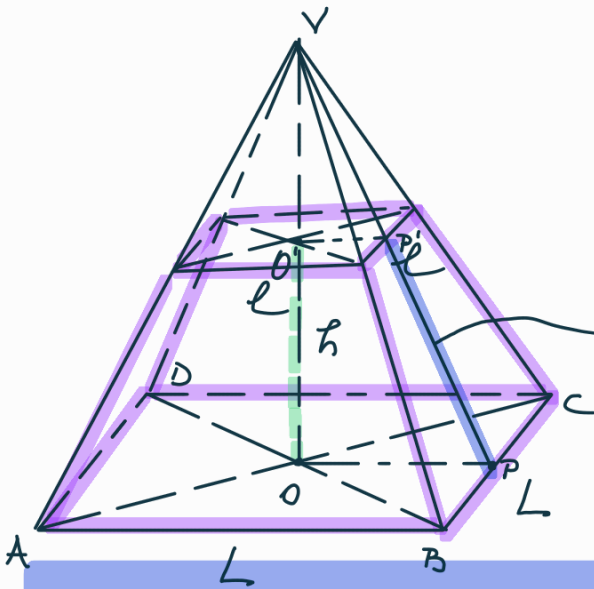
TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ REGULATĂ

Sectionând piramida cu un plan paralel cu baza $\Rightarrow$ TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ

$OO' = h =$ înălțimea

trunchiului

$PP' =$ apotema trunchiului



$$A_{lat+tr.} = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_{tr}}{2} = \frac{n(L + l) \cdot a_{tr}}{2}$$

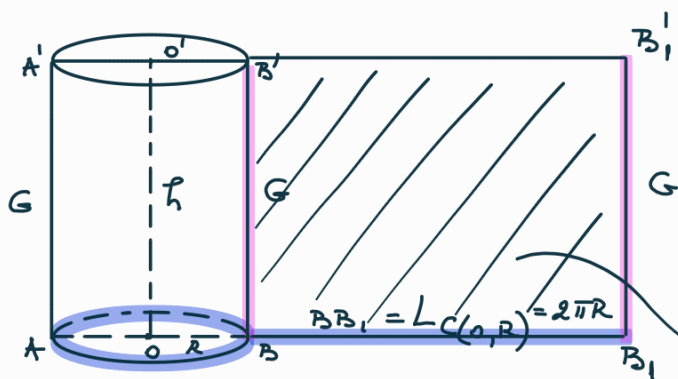
$$A_{tot+tr} = A_{lat+tr} + A_{bazei\ mici} + A_{bazei\ mari}$$

$$A_{tot. tr} = \frac{n(L+l)a_{tr}}{2} + l^2 + L^2$$

$$V_{tr} = \frac{h}{3} (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}) =$$

$$= \frac{h}{3} (L^2 + l^2 + L \cdot l)$$

CILINDRUL CIRCULAR DREPT



- Bazele sunt cercuri: $C(O, R)$
 $C(O', R)$

- Înălțimea $h = OO'$

- Generatoarea

$$G = AA' = BB' = OO' = h$$

$ABB'A' =$ secțiunea
 axiată a
 cilindrului

$$A_{bazei} = \pi R^2$$

$BB_1B'_1B'_1 =$ desfășurarea
 cilindrului

$$A_{lat\ cil} = A_{BB_1B'_1B'_1} = 2\pi R \cdot G$$

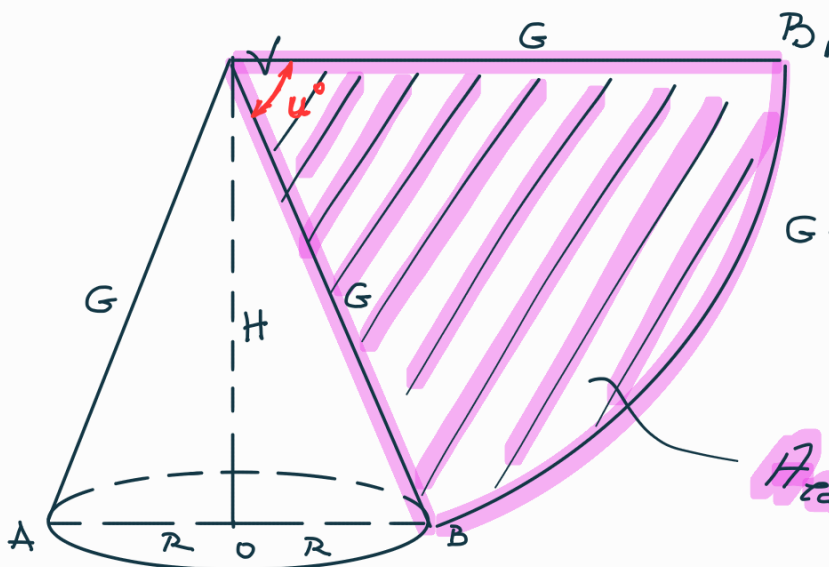
$$BB_1 = L_{C(O, R)} = 2\pi R$$

$$A_{tot\ cil} = A_{lat} + 2 \cdot A_{bazei} =$$

$$= 2\pi R G + 2 \cdot \pi R^2$$

$$V_{cil} = A_{bazei} \cdot h = \pi R^2 \cdot G$$

CONUL CIRCULAR DREPT



$G = VA = VB =$ generatoarea
 conului

$VO = H =$ înălțimea
 conului

$\Delta VAB =$ secțiunea axiată a conului

$A_{lat\ con} =$ $A_{sector\ circular}$
 cu centrul în
 V și rază = $G =$
 $= VA$

$\angle u^\circ =$ $\angle$ la centru corespunzător sectorului
 de cerc din desfășurarea conului

$$u^\circ = 360^\circ \cdot \frac{R}{G}$$

ΔVOB

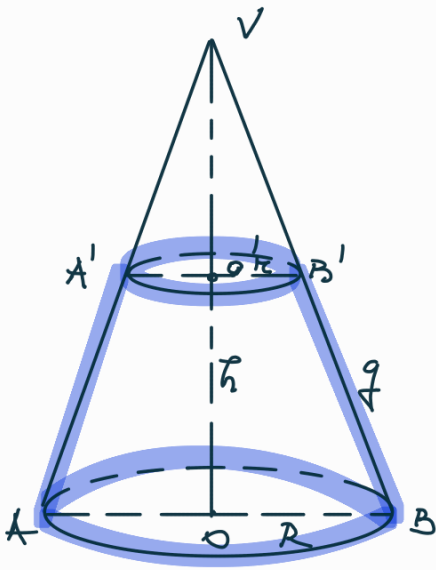
$$H^2 + R^2 = G^2$$

$$A_{\text{cat con}} = \pi R G$$

$$A_{\text{tot con}} = A_{\text{cat con}} + A_{\text{bazei}} = \pi R G + \pi R^2 = \pi R (G + R)$$

$$V_{\text{con}} = \frac{A_b \cdot H}{3} = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3}$$

TRUNCHIUL DE CON CIRCULAR DREPT



$ABB'A'$ = secțiunea
axiote a
trunchiului
de con

$OO' = h$ = înălțimea trunchiului
de con

$BB' = AA' = g$ = generatoarea tr.
de con

$$O'B' = r ; OB = R$$

$$A_{\text{cat tr. con}} = \pi g (R + r)$$

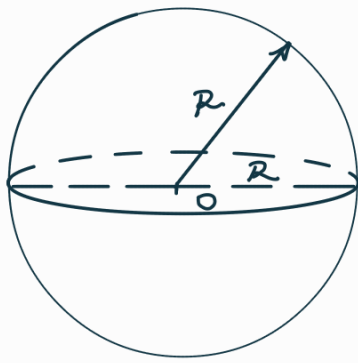
$$A_{\text{tot tr. con}} = A_{\text{cat tr.}} + A_b + A_B = \pi g (R + r) + \pi r^2 + \pi R^2$$

$$V_{\text{tr. con}} = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

$$\Delta VO'B' \sim \Delta VO'B \quad (\text{T.F.A} \quad O'B' \parallel OB)$$

$$\frac{VO'}{VO} = \frac{VB'}{VB} = \frac{O'B'}{OB}$$

SFERA



$$A_{\text{sferrei}} = 4\pi R^2$$

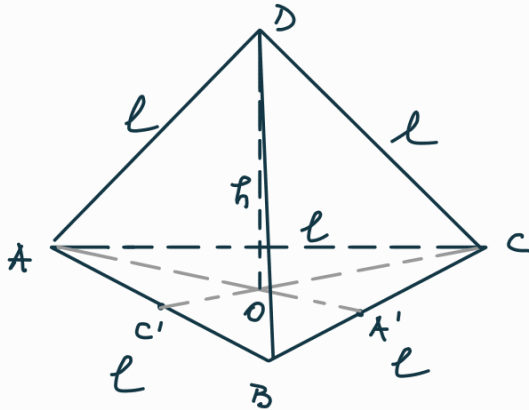
$$V_{\text{sferrei}} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

TETRAEDRUL REGULAT:

- tetraedrul cu toate muchiile congruente

$$A_{\Delta \text{ echilat}} = \frac{e^2 \sqrt{3}}{4}$$

- toate fețele sunt Δ echilaterale



$$A_{\text{cat}} = 3 \cdot \frac{e^2 \sqrt{3}}{4}$$

tetr. regulat

$$A_{\text{tot}} = 4 \cdot \frac{e^2 \sqrt{3}}{4}$$

tetr. regulat

$$V = \frac{A_{\text{b}} \cdot h}{3} = \frac{\frac{e^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{e \sqrt{6}}{3}}{3}$$

tetr.

$$DO = h$$

$$\Delta AOD: AO = \frac{\cancel{2}}{3} \frac{e\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{e\sqrt{3}}{3}$$

dr. ($\angle DOA = 90^\circ$)

C.Th.P

$$\Rightarrow DO^2 = AD^2 - AO^2 = e^2 - \frac{3e^2}{9}$$

$$DO^2 = \frac{6e^2}{9} \Rightarrow DO = \frac{e\sqrt{6}}{3}$$

$$V = \frac{e^3 \cdot \cancel{3} \sqrt{2}}{12 \cdot \cancel{3}} = \frac{e^3 \sqrt{2}}{12}$$

tetr. regulat

